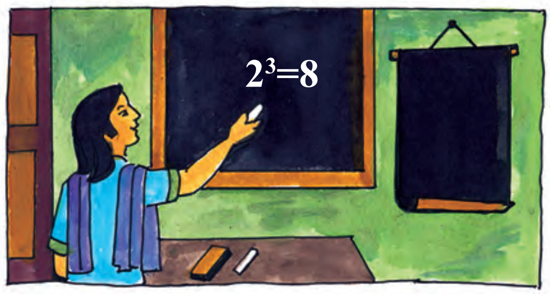
21 লগারিদম্‌ (LOGARITHM)

আমার বন্ধু তথাগত একটি কালো রঙের চার্ট পেপারে অনেকগুলি সংখ্যা লিখে শ্রেণিকক্ষের দেওয়ালে টাঙিয়ে দিয়েছে। আমরা এই চার্টে লেখা সংখ্যাগুলি নিয়ে এক মজার খেলা খেলব। আমার বন্ধু বুলু ব্ল্যাকবোর্ডে একটি সংখ্যা 2 লিখল। আমরা তথাগতর তৈরি চার্ট পেপারে যে-কোনো একটি সংখ্যা বোর্ডে লিখব এবং সেই সংখ্যাটি 2-এর কোন ঘাতে আছে নির্ণয় করার চেষ্টা করব।



নাজরিন 2-এর পাশে চার্ট পেপার থেকে 8 সংখ্যাটি বোর্ডে লিখল

আমি 2-এর কোন ঘাতে 8 পাবো দেখি।

$2^3=8$

এবার নাজরিন 2 -এর পাশে চার্ট পেপার থেকে 64 সংখ্যাটি বোর্ডে লিখল।

2-কে কোন ঘাতে উন্নীত করলে 64 পাবো হিসাব করি

ধরি, $2^x = 64 = 2^6$

$\therefore x = 6$

বুঝেছি, 2-এর ষষ্ঠঘাত 64

এবার নাজরিন 2-এর পাশে চার্ট পেপার থেকে 7 সংখ্যাটি লিখেছে।

আমি 2-কে কোন ঘাতে উন্নীত করলে 7 পাব দেখি।

ধরি, $2^x=7$———(i)

চারটি প্রাথমিক প্রক্রিয়া যেমন যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ এবং উদ্‌ঘাতন (Involution) [ঘাত বৃদ্ধি যেমন, 5^2, $3^{4/3}$ ইত্যাদি], অবঘাতন (Evolution) [মূল নির্ণয় যেমন, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{4}$ ইত্যাদি] এই 6 টি মৌলিক প্রক্রিয়া দ্বারা x-এর মান বের করতে পারব না।

কিন্তু (i) নং সমীকরণের সমাধান কীভাবে পাব ?

লগারিদমের ধারণা ব্যবহার করে আমরা (i) নং সমীকরণের সমাধান করতে পারি। লগারিদ্‌মের ধারণাকে কখন কখনও বলা হয় **সপ্তম মৌলিক প্রক্রিয়া**।

আমরা দেখছি, $2^2 = 4$ এবং $2^3 = 8$

সুতরাং বুঝতে পারছি, $2^x = 7$ হলে, x এমন একটি বাস্তব সংখ্যা হবে যে $2 < x < 3$ হবে এবং সেই বাস্তব সংখ্যাটিকে আমরা $\log_2 7$ বলি।

$\therefore 2^x = 7$ সমীকরণটি সমাধান করে পাই $x = \log_2 7$

সংজ্ঞা: যদি a ও M দুটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a > 0$, $a \neq 1$ এবং $M > 0$ হয়, তবে একটি বাস্তব সংখ্যা x-কে নিধান a-এর সাপেক্ষে M-এর লগারিদ্‌ম বলা হয় যদি $a^x = M$ হয় এবং লিখি $x = \log_a M$; $M \neq 1$ এর জন্য $\log_a M = \log_b M$ হবে, যদি এবং একমাত্র যদি $a = b$ হয়, অর্থাৎ $M \neq 1$ এর জন্য $\log_a M$ একটি অনন্য (Unique) বাস্তব সংখ্যা।

যেমন, $\log_2 1 = \log_3 1 = 0$; কেননা $2^0 = 1$ এবং $3^0 = 1$; কিন্তু $\log_2 5 \neq \log_3 5$

আবার, $\log_2 8 = 3$; কারণ $2^3 = 8$;

$\log_2 64 = 6$; কারণ $2^6 = 64$

1 নাজরিন এবার 2-এর পাশে ব্ল্যাকবোর্ডে 0.25 লিখল। আমি লগারিদ্‌মের ধারণা ব্যবহার করে 2-এর কোন ঘাত 0.25 হবে লিখি।

$2^x = 0.25$

বা, $2^x = \frac{25}{100}$ বা, $2^x = \frac{1}{4}$ বা, $2^x = \frac{1}{2^2}$

$\therefore$ $2^x = 2^{-2}$

সুতরাং, $\log_2 0.25 = -2$ [যেহেতু, $2^{-2} = 0.25$]

2 আমি $\log_{\sqrt{3}} 81$-এর মান হিসাব করে লিখি

ধরি, $x = \log_{\sqrt{3}} 81$

$\therefore$ সংজ্ঞা থেকে পাই, $(\sqrt{3})^x = 81 = 3^4$

বা, $3^{\frac{x}{2}} = 3^4$ বা, $\frac{x}{2} = 4$

$\therefore x = 8$

3 আমি $\log_{\sqrt{7}} 343$-এর মান হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

যদি $M > 0$ এবং $a > 0$ ও $a \neq 1$ না হয় তাহলে কি লগারিদ্‌মের সংজ্ঞা পাব না?

(i) নাজরিন $M < 0$ এবং a সংজ্ঞানুযায়ী নিয়ে $\log_a M$ -এর মান পাওয়ার চেষ্টা করল।

যদি $\log_2 (-5) = x$ হয়, তবে $2^x = -5$ হতে হবে।

কিন্তু সর্বদাই $2^x > 0$; সুতরাং, $M < 0$ অবস্থায় $\log_a M$ অসংজ্ঞাত।

(ii) নাজরিনের বন্ধু সহেলী $M = 0$ এবং a সংজ্ঞানুযায়ী নিয়ে $\log_a M$-এর মান পাওয়ার চেষ্টা করল।

যদি, $\log_2 0 = x$ হয়, তবে $2^x = 0$ হবে।

কিন্তু সর্বদাই $2^x > 0$; সুতরাং, $M=0$ অবস্থায় $\log_a M$ অসংজ্ঞাত।

(iii) সহেলীর বন্ধু রজত $a < 0$ এবং M সংজ্ঞানুযায়ী নিয়ে $\log_a M$-এর মান পাওয়ার চেষ্টা করল।

(a) যদি $\log_{-2}16 = x$ হয়, তবে $(-2)^x = 16$; সুতরাং, $x = 4$

আবার, যদি $\log_2 16 = y$ হয়, তবে $2^y = 16$; অর্থাৎ, $y = 4$

$\therefore \log_{-2}16 = \log_2 16$; কিন্তু $\log_a M = \log_b M$ হলে, $a = b$ হয় যখন $M \neq 1$; কিন্তু $-2 \neq 2$

সুতরাং, $a < 0$ এবং M সংজ্ঞানুযায়ী নিয়ে $\log_a M$-এর মান অনন্য (Unique) নয়। তাই $a < 0$ অবস্থায় $\log_a M$ অনন্যতার অভাবে অসংজ্ঞাত।

(b) আবার রজত $a = 0$ এবং M সংজ্ঞানুযায়ী নিয়ে $\log_a M$-এর মান পাওয়ার চেষ্টা করল।

$\log_0 16 = x \quad \therefore 0^x = 16$; কিন্তু $0^x = 0 \ (x > 0)$

সুতরাং, $\log_a M$ অসংজ্ঞাত যখন $a = 0$

(c) এবার রজত $a = 1$ এবং M সংজ্ঞানুযায়ী নিয়ে $\log_a M$-এর মান পাওয়ার চেষ্টা করল

$\log_1 16 = x \quad \therefore 1^x = 16$; কিন্তু বাস্তব সংখ্যা x-এর জন্য 1^x এর বাস্তব মান 1

সুতরাং, $\log_a M$ অসংজ্ঞাত যখন $a = 1$

(iv) রজতের বন্ধু সিরাজ $a < 0$ এবং $M < 0$ নিয়ে লগারিদমের মান পাওয়ার চেষ্টা করল।

4 $\log_{-2}(-16)$-এর মান পাওয়া যায় কিনা দেখি (নিজে করি)

নিজে করি — 20.1

(1) $\log_2(-7)$ (2) $\log_5 0$ (3) $\log_{-3}2$ (4) $\log_0 2$ (5) $\log_1 7$ -এগুলির মান পাওয়া যায় কিনা দেখি

জোসেফ ব্ল্যাকবোর্ডে দুটি সংখ্যা 8 ও 32 লিখল।

5 আমি 2 নিধানের সাপেক্ষে 8 ও 32-এর লগারিদ্‌ম লিখি।

$\log_2 8 = 3 \quad [\because 2^3 = 8]$

$\log_2 32 = 5 \ [\because 2^5 = 32]$

6 2 নিধানের সাপেক্ষে 8×32 এবং $\frac{32}{8}$ -এর লগারিদ্‌ম লিখি।

$\log_2(8\times32) = \log_2 256 = 8 = 3+5 = \log_2 8 + \log_2 32 \qquad [\because 2^8 = 256]$

আবার, $\log_2 (\frac{32}{8}) = \log_2 4 = 2 = 5 - 3 = \log_2 32 - \log_2 8$

7 M ও N যে কোনো দুটি বাস্তব সংখ্যা $M > 0$ এবং $N > 0$ এবং a যে কোনো একটি বাস্তব সংখ্যা $a > 0, a \neq 1$ হলে, $\log_a M$, $\log_a N$-এর সাহায্যে $\log_a(MN)$ ও $\log_a \frac{M}{N}$ -কে প্রকাশ করে কী পাই দেখি।

ধরি, $\log_a M = p, \log_a N = q$

$\therefore a^p = M$ এবং $a^q = N$

$\therefore MN = a^p \times a^q = a^{p+q}$

$\therefore \log_a MN = p + q = \log_a M + \log_a N$

$\therefore$ **পেলাম $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ .... (I)**

এবং $\frac{M}{N} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

$\therefore \log_a \frac{M}{N} = p - q = \log_a M - \log_a N$

পেলাম, $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ ———————— **II**

8 আমি 2-এর নিধানের সাপেক্ষে 8^5 -এর লগারিদ্ম নির্ণয় করি ও কী পাই দেখি।

$\log_2 8 = 3 \quad [\because 2^3 = 8]$

আবার, $8^5 = (2^3)^5 = 2^{15}$

$\therefore \log_2 8^5 = 15 = 5\times3 = 5 \times \log_2 8$

9 M, a, c যে কোনো তিনটি বাস্তব সংখ্যা $M > 0, a > 0, a \neq 1$, $\log_a M^c$– এর সরল মান কি পাই দেখি।

ধরি, $\log_a M = p \quad \therefore a^p = M$

$\therefore \quad M^c = (a^p)^c = a^{pc}$

$M^c > 0$, যেহেতু $M > 0$

$\therefore \log_a M^c = pc = c.p = c \log_a M$

$\therefore$ **পেলাম, $\log_a M^c = c \log_a M$ ———— III**

10 কিন্তু আমি যদি লগারিদ্মের নিধান পরিবর্তন করতে চাই অর্থাৎ $\log_a M$ -কে $\log_b M$ (যেখানে b যেকোনো একটি বাস্তব সংখ্যা ও $b \neq 1, b > 0$) -এর সাহায্যে প্রকাশ করতে চাই, তবে কীভাবে প্রকাশ করব দেখি।

ধরি, M, a,b তিনটি বাস্তব সংখ্যা যেখানে, $M > 0, a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$

ধরি, $\log_b M = r \quad \therefore b^r = M$

এবং $\log_a b = d \quad \therefore a^d = b$

$\therefore M = b^r = (a^d)^r = a^{rd}$

$\therefore \log_a M = rd = \log_b M \times \log_a b$

$\therefore$ **পেলাম, $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$ ———— IV**

I থেকে IV পর্যন্ত 4 টি লগারিদ্মের সূত্র পেলাম এবং IV নং সূত্রটিকে নিধান পরিবর্তনের সূত্র বলা হয়। $\log_y x$-এই ধরনের কোন সংখ্যার ক্ষেত্রে সবসময় ধরে নেব x ও y দুটি বাস্তব সংখ্যা, $x > 0, y > 0, y \neq 1$

4 টি লগারিদ্মের সূত্র ছাড়াও লগারিদ্মের সংজ্ঞা ও সূত্র থেকে কী কী লিখতে পারি দেখি।

(i) $\log_a 1 = 0 \quad [\because a^0=1]$

(ii) $\log_a a = 1 \quad [\because a^1 = a]$

(iii) $a^{\log_a M} = M \quad$ [ধরি, $\log_a M = u \therefore a^u = M \therefore a^{\log_a M} = M$]

(iv) $\log_a b\times\log_b a = \log_a a = 1 \quad$ [সূত্র IV থেকে পাই]

(v) $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$

(vi) $\log_b M = \dfrac{\log_a M}{\log_a b} \quad [\because \log_a M = \log_b M \times \log_a b]$

(vii) $\log_a (M_1M_2M_3......M_n) = \log_a M_1 + \log_a M_2 + \log_a M_3 + ... + \log_a M_n$ [যেখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা]

(viii) $\log_a \dfrac{1}{a} = -1 \quad$ [যেহেতু $\log_a \dfrac{1}{a} = \log_a 1 - \log_a a = 0 - 1 = -1$]

(ix) $\dfrac{\log_a M}{\log_a N} = \dfrac{\log_b M}{\log_b N} \quad$ [সূত্র IV থেকে পাই]

(x) যদি $\log_a M = \log_a N$ হয়, তবে $M = N$

[$\log_a M = \log_a N$ হলে, $a^{\log_a M} = a^{\log_a N} \therefore M = N$, (iii) নং থেকে পেলাম]

11 আমি $\log_3 \{\log_2(\log_{\sqrt{3}}81)\}$ -এর মান নির্ণয় করি।

$\log_3 \{\log_2(\log_{\sqrt{3}}81)\}$

$= \log_3 \{\log_2 (\log_{\sqrt{3}}3^4)\}$

$= \log_3 [\log_2 (\log_{\sqrt{3}} \{(\sqrt{3})^2\}^4)]$

$= \log_3\{\log_2 (\log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^8)\}$

$= \log_3 \{\log_2 8 (\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3})\}$ [$\because \log_a M^c = c \log_a M$]

$= \log_3 \{\log_2 8\}$ [$\because \log_a a = 1$]

$= \log_3 \{\log_2 2^3\} = \log_3 \{3\log_2 2\} = \log_3 3 = 1$

12 আমি $\log_2 10 - \log_5 125 \times \log_8 5 = 1$ — প্রমাণ করি।

বামপক্ষ $= \log_2 10 - \log_5 125 \times \log_8 5$

$= \log_2(5\times2) - \log_5 125 \times \log_8 5$

$= \log_2 5 + \log_2 2 - \log_5 5^3 \times \dfrac{1}{\log_5 8}$ [$\because \log_a MN = \log_a M + \log_a N$ এবং $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$]

$= \log_2 5 + 1 - 3\log_5 5 \times \dfrac{1}{\log_5 2^3}$ [$\because \log_a a = 1$এবং $\log_a M^c = c \log_a M$]

$= \log_2 5 + 1 - 3 \times \dfrac{1}{3\log_5 2} = \log_2 5 + 1 - \log_2 5 = 1 =$ ডানপক্ষ [প্রমাণিত]

13 আমি $(7\log\dfrac{10}{9} - 2 \log\dfrac{25}{24} + 3 \log \dfrac{81}{80})$-এর সরলতম মান হিসাব করে লিখি।

[নিধানের উল্লেখ না থাকলে এই অধ্যায়ের সব অঙ্কে $\log M$ বললে বুঝব $\log_{10}M$]

$7 \log\dfrac{10}{9} - 2 \log \dfrac{25}{24} + 3 \log \dfrac{81}{80}$

$= 7(\log 10 - \log 9) - 2 (\log 25 - \log 24) + 3 (\log 81 - \log 80)$

$= 7 \{\log (2 \times 5) - \log 3^2\} - 2 \{(\log5^2 - \log (2^3 \times 3)\} + 3 \{\log 3^4 - \log (5 \times 2^4)\}$

$= 7 \{\log2 + \log5 - 2 \log 3\} - 2\{2 \log5 - 3 \log 2 - \log 3\} + 3 \{4 \log 3 - \log5 - 4 \log2\}$

$= 7 \log2 + 7 \log5 - 14 \log3 - 4 \log5 + 6 \log2 + 2 \log3 + 12 \log3 - 3 \log5 - 12 \log2$

$= \log2$

14 আমি $7 \log\dfrac{16}{15} + 5 \log \dfrac{25}{24} + 3 \log \dfrac{81}{80} = \log2$ — প্রমাণ করি। [নিজে করি]

15 $\dfrac{1}{2}$ -এর লগারিদ্‌ম $-\dfrac{1}{2}$ হলে নিধান নির্ণয় করি।

ধরি, নিধান $= x$

$\therefore \log_x\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

বা, $(x^{-\frac{1}{2}})^2 = (\dfrac{1}{2})^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে পাই]

বা, $x^{-1} = \dfrac{1}{4}$ বা, $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{4}$ $\therefore x = 4$ নির্ণীত নিধান= 4

16 0.04 -এর লগারিদম – 2 হলে, নিধান কী হবে হিসাব করে লিখি। [নিজে লিখি]

17 যদি $a^2 + b^2 = 7ab$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $\log\frac{1}{3}\ (a + b) = \frac{1}{2}\ (\log a + \log b)$

দেওয়া আছে, $a^2 + b^2 = 7ab$

বা, $a^2 + b^2 + 2ab = 9ab$

বা, $(a + b)^2 = 9ab$

বা, $\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = (ab)$

বা, $\log\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = \log(ab)$ [উভয়পক্ষে log নিলাম]

বা, $2\log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \log(ab)$

$\therefore \log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ [প্রমাণিত]

18 যদি $a^2 - 11ab + b^2 = 0$ হয়, তাহলে দেখাই যে $\log\frac{1}{3}(a - b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ [নিজে করি]

ফিরোজ ব্ল্যাকবোর্ডে অনেকগুলো লগারিদ্গম লিখল যাদের নিধান 10

ফিরোজ লিখল, (i) $\log_{10}10$ (ii) $\log_{10}100$ (iii) $\log_{10}1000$ (iv) $\log_{10}125$

19 আমি ফিরোজের লেখা লগারিদ্মের মান নির্ণয় করি।

(i) $\log_{10}10 = 1$ (ii) $\log_{10}100 = \log_{10}10^2 = 2\log_{10}10 = 2$

(iii) $\log_{10}1000 = \boxed{}$ [নিজে লিখি]

(iv) $\log_{10}125$

$= \log_{10}5^3$

$= 3\log_{10}5$

$= 3\log_{10}\frac{10}{2}$

$= 3(\log_{10}10 - \log_{10}2)$

$= 3(1 - \log_{10}2)$

কিন্তু যে সকল লগারিদ্মের নিধান 10 তাদের কী বলব?

নিধান 10 সাপেক্ষে কোনো বাস্তব সংখ্যা $M(>0)$ -এর লগারিদ্মকে ওই সংখ্যাটির সাধারণ লগারিদ্ম (Common Logarithm) বলা হয়।

সাধারণ লগারিদ্ম-এর ধারণাটি প্রথম চালু করেছিলেন হেনরি ব্রিগস (Henry Briggs)। তার নাম অনুসারে কখনো কখনো এই বিশেষ লগারিদ্মকে ব্রিগারীয় পদ্ধতি (Briggarian system of Logarithm) -ও বলা হয়।

সাধারণ লগারিদ্ম ছাড়া অন্য কোন লগারিদ্ম আমরা প্রচুর ব্যবহার করি?

সাধারণ লগারিদ্ম ছাড়া আমরা স্বাভাবিক লগারিদ্ম (Natural Logarithm) ব্যবহার করি।

কোনো বাস্তব সংখ্যা M(>0) -এর যে লগারিদ্‌মের নিধান e [যেখানে e হচ্ছে 2.71828-এর কাছাকাছি অর্থাৎ 2 ও 3 -এর অন্তবর্তী একটি তুরীয় অমূলদ সংখ্যা(Transcendental Irrational Number)] সেই লগারিদ্‌ম M-কে **স্বাভাবিক লগারিদ্‌ম** বলা হয়।

স্বাভাবিক লগারিদ্‌ম-এর ধারণাটি প্রথম পাওয়া যায় ইংরেজ গণিতজ্ঞ জন নেপিয়র-এর লেখা বইতে। স্বাভাবিক লগারিদ্‌মকে অনেক সময় লগারিদ্‌ম-এর নেপিয়রীয় পদ্ধতি বলা হয়।

20 $\log_{10}(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2) = \log_{10}4$ হলে, a ও b -এর মধ্যে সম্পর্ক লিখি।

$\log_{10}(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2) = \log_{10}4$

বা, $\log_{10}(\frac{a^2+b^2+2ab}{ab}) = \log_{10}2^2$

বা, $\frac{(a+b)^2}{ab} = 4$

বা, $(a+b)^2 = 4ab$

বা, $(a+b)^2 - 4ab = 0$

বা, $(a-b)^2 = 0$

বা, $a-b = 0$ $\therefore$ $a = b$ এটি, a ও b -এর মধ্যে সম্পর্ক।

21 হিসাব করে দেখাই যে, $\log_{10}3$-এর মান $\frac{1}{3}$ ও $\frac{1}{2}$ -এর মধ্যে আছে।

ধরি, $\log_{10}3 = x$

$\therefore$ $10^x = 3$

$\frac{1}{2}$ ও $\frac{1}{3}$-এর হরগুলির ল.সা.গু. $\boxed{}$

$10^x = 3$

$\therefore$ $(10^x)^6 = 3^6 = 729$

$\therefore$ $10^{6x} = 729$

যেহেতু, $100 < 729 < 1000$

বা, $10^2 < 10^{6x} < 10^3$

বা, $2 < 6x < 3$

বা, $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$

সুতরাং, $\frac{1}{3} < \log_{10}3 < \frac{1}{2}$

22 যদি $x = \log_{2a}a$, $y = \log_{3a}2a$ এবং $z = \log_{4a}3a$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে $xyz + 1 = 2yz$

$x = \log_{2a}a$, $y = \log_{3a}2a$ এবং $z = \log_{4a}3a$

বামপক্ষ $= xyz+1 = \log_{2a}a \times \log_{3a}2a \times \log_{4a}3a + 1$

$= \log_{3a}a \times \log_{4a}3a + 1$

$= \log_{4a}a + 1 = \log_{4a}a + \log_{4a}4a$

$= \log_{4a}4a^2$

$= \log_{4a}(2a)^2$

$= 2\log_{4a}2a$

$= 2\log_{3a}2a \times \log_{4a}3a$

$= 2yz =$ ডানপক্ষ $\quad \therefore$ পেলাম, $xyz + 1 = 2yz$ (প্রমাণিত)

23 $x = \log_a bc$, $y = \log_b ca$ এবং $z = \log_c ab$ হলে, দেখাই যে, $x + y + z = xyz - 2$ [নিজে করি]

24 $\dfrac{\log x}{y-z} = \dfrac{\log y}{z-x} = \dfrac{\log z}{x-y}$ হলে, দেখাই যে, $x^x . y^y . z^z = 1$

ধরি, $\dfrac{\log x}{y-z} = \dfrac{\log y}{z-x} = \dfrac{\log z}{x-y} = k$ [যেখানে $k \neq 0$]

$\therefore \log x = k(y-z)$, আবার, $\log y = k(z-x)$ এবং $\log z = k(x-y)$

বা, $x \log x = xk(y-z)$, বা, $y \log y = yk(z-x)$ বা, $z \log z = zk(x-y)$

বা, $\log x^x = k(xy - zx)$...(i) বা, $\log y^y = k(yz - xy)$...(ii) বা, $\log z^z = k(zx - yz)$ ...(iii)

(i) + (ii) + (iii) করে পাই, $\log x^x + \log y^y + \log z^z = k[xy - zx + yz - xy + zx - yz] = 0$

বা, $\log x^x y^y z^z = \log 1$ [$\because \log 1 = 0$]

$\therefore x^x . y^y . z^z = 1$ (প্রমাণিত)

25 যদি $\dfrac{\log x}{b-c} = \dfrac{\log y}{c-a} = \dfrac{\log z}{a-b}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $x^a . y^b . z^c = 1$

ধরি, $\dfrac{\log x}{b-c} = \dfrac{\log y}{c-a} = \dfrac{\log z}{a-b} = k \ (k \neq 0)$

$\therefore \log x = k(b-c)$, $\log y = k(c-a)$, $\log z = k(a-b)$

এখন, $\log(x^a . y^b . z^c) = \log x^a + \log y^b + \log z^c$

$= a\log x + b\log y + c\log z$

$= ak(b-c) + bk(c-a) + ck(a-b)$

$= k(ab - ca + bc - ab + ca - bc)$

$= k \times 0 = 0 = \log 1$ $\quad$ সুতরাং, $x^a . y^b . z^c = 1$ (প্রমাণিত)

26 যদি $a^{2-x}. b^{5x} = a^{x+3}. b^{3x}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $x \log \frac{b}{a} = \log\sqrt{a}$

$a^{2-x}. b^{5x} = a^{x+3}. b^{3x}$

বা, $\frac{b^{5x}}{b^{3x}} = \frac{a^{x+3}}{a^{2-x}}$

বা, $b^{5x-3x} = a^{x+3-2+x}$

বা, $b^{2x} = a^{2x+1}$

বা, $b^{2x} = a^{2x}.a$

বা, $(\frac{b}{a})^{2x} = a$

সুতরাং, $\log(\frac{b}{a})^{2x} = \log a$ [উভয়পক্ষে log নিলাম]

বা, $2x \log(\frac{b}{a}) = \log a$

বা, $x \log(\frac{b}{a}) = \frac{1}{2}\log a$

বা, $x \log(\frac{b}{a}) = \log a^{\frac{1}{2}}$

$\therefore$ $x \log(\frac{b}{a}) = \log\sqrt{a}$ (প্রমাণিত)

27 সমাধান করি (i) $\log_{10}x - \log_{10}\sqrt{x} = \frac{2}{\log_{10}x}$ (ii) $\log_2 \log_2 \log_2 x = 1$

(i) $\log_{10}x - \log_{10}\sqrt{x} = \frac{2}{\log_{10}x}$

বা, $\log_{10}x - \log_{10}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\log_{10}x}$

বা, $\log_{10}x - \frac{1}{2}\log_{10}x = \frac{2}{\log_{10}x}$

বা, $\frac{1}{2}\log_{10}x = \frac{2}{\log_{10}x}$

বা, $(\log_{10}x)^2 = 4$

বা, $\log_{10}x = \pm 2$

$\log_{10}x = 2$ হলে, $x = 10^2$ $\therefore$ $x = 100$

আবার, $\log_{10}x = -2$ হলে, $x = 10^{-2}$ $\therefore$ $x = \frac{1}{100}$

নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{1}{100}$ বা 100

(ii) $\log_2 \log_2 \log_2 x = 1$

বা, $\log_2\log_2 x = 2^1$ বা, $\log_2\log_2 x = 2$ বা, $\log_2 x = 2^2$ বা, $\log_2 x = 4$

বা, $x = 2^4$ $\therefore$ $x = 16$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 16$

কষে দেখি— 21

1. মান নির্ণয় করি :

(i) $\log_4\left(\frac{1}{64}\right)$ (ii) $\log_{0.01} 0.000001$ (iii) $\log_{\sqrt{6}} 216$ (iv) $\log_{2\sqrt{3}} 1728$

2. (a) 625 -এর লগারিদ্‌ম 4 হলে, নিধান কী হবে হিসাব করে লিখি।

(b) 5832- এর লগারিদ্‌ম 6 হলে, নিধান কী হবে হিসাব করে লিখি।

3. (a) $1 + \log_{10}a = 2\log_{10}b$ হলে, a কে b -এর দ্বারা প্রকাশ করি ।

(b) $3 + \log_{10}x = 2\log_{10}y$ হলে, x কে y-এর দ্বারা প্রকাশ করি।

4. মান নির্ণয় করি :

(a) $\log_2[\log_2\{\log_3(\log_3 27^3)\}]$

(b) $\dfrac{\log\sqrt{27} + \log 8 - \log\sqrt{1000}}{\log 1.2}$

(c) $\log_3 4 \times \log_4 5 \times \log_5 6 \times \log_6 7 \times \log_7 3$

(d) $\log_{10}\frac{384}{5} + \log_{10}\frac{81}{32} + 3\log_{10}\frac{5}{3} + \log_{10}\frac{1}{9}$

5. প্রমাণ করি :

(i) $\log\frac{75}{16} - 2\log\frac{5}{9} + \log\frac{32}{243} = \log 2$

(ii) $\log_{10}15(1+\log_{15}30) + \frac{1}{2}\log_{10}16(1+\log_4 7) - \log_{10}6(\log_6 3+1+\log_6 7)=2$

(iii) $\log_2\log_2\log_4 256+2\log_{\sqrt{2}} 2=5$

(iv) $\log_{x^2} x \times \log_{y^2} y \times \log_{z^2} z = \frac{1}{8}$

(v) $\log_{b^3} a \times \log_{c^3} b \times \log_{a^3} c = \frac{1}{27}$

(vi) $\dfrac{1}{\log_{xy}(xyz)} + \dfrac{1}{\log_{yz}(xyz)} + \dfrac{1}{\log_{zx}(xyz)} = 2$

(vii) $\log\frac{a^2}{bc} + \log\frac{b^2}{ca} + \log\frac{c^2}{ab} = 0$

(viii) $x^{\log y - \log z} \times y^{\log z - \log x} \times z^{\log x - \log y} = 1$

6. (i) যদি $\log\frac{x+y}{5} = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 23$

(ii) যদি $a^4 + b^4 = 14a^2b^2$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $\log(a^2 + b^2) = \log a + \log b + 2\log 2$

7. যদি $\dfrac{\log x}{y-z} = \dfrac{\log y}{z-x} = \dfrac{\log z}{x-y}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $xyz = 1$

8. যদি $\dfrac{\log x}{b-c} = \dfrac{\log y}{c-a} = \dfrac{\log z}{a-b}$ হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে,

(a) $x^{b+c} \cdot y^{c+a} \cdot z^{a+b} = 1$ (b) $x^{b^2+bc+c^2} \cdot y^{c^2+ca+a^2} \cdot z^{a^2+ab+b^2} = 1$

9. যদি, $a^{3-x} . b^{5x} = a^{5+x} . b^{3x}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $x \log \left(\frac{b}{a}\right) = \log a$

10. সমাধান করি :

(a) $\log_8 [\log_2 \{\log_3 (4^x + 17)\}] = \dfrac{1}{3}$ (b) $\log_8 x + \log_4 x + \log_2 x = 11$

11. দেখাই $\log_{10} 2$ -এর মান $\dfrac{1}{4}$ এবং $\dfrac{1}{3}$ -এর মধ্যে অবস্থিত।

12. বহু বিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.)

(i) যদি $\log_{\sqrt{x}} 0.25 = 4$ হয়, তাহলে x -এর মান

(a) 0.5 (b) 0.25 (c) 4 (d) 16

(ii) $\log_{10}(7x-5) = 2$ হলে, x -এর মান

(a) 10 (b) 12 (c) 15 (d) 18

(iii) $\log_2 3 = a$ হলে, $\log_8 27$ হবে

(a) 3a (b) $\dfrac{1}{a}$ (c) 2a (d) a

(iv) $\log_{\sqrt{2}} x = a$ হলে, $\log_{2\sqrt{2}} x$ হবে

(a) $\dfrac{a}{3}$ (b) a (c) 2a (d) 3a

(v) $\log_x \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{3}$ হলে, x- এর মান হবে

(a) 27 (b) 9 (c) 3 (d) $\dfrac{1}{27}$

13. সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন

(i) $\log_4 \log_4 \log_4 256$ -এর মান কত হবে হিসাব করি।

(ii) $\log \dfrac{a^n}{b^n} + \log \dfrac{b^n}{c^n} + \log \dfrac{c^n}{a^n}$ -এর মান কত হবে হিসাব করি।

(iii) দেখাই যে $a^{\log_a x} = x$

(iv) $\log_e 2 . \log_x 25 = \log_{10} 16 . \log_e 10$ হলে, x -এর মান নির্ণয় করি।